Линейные системы.
Системы называется линейной, если все законы, связывающие q, U, I, R, L, C, содержат их в первой степени.
Линейными элементами являются:
резисторы-резики,
катушки-катьки
конденсаторы-кондюки,
источники напряжения и тока

Метод комплексных амплитуд
Задача, которая перед нами стоит: просчитать линейную цепь.
Есть метод комплексных амплитуд, заключающийся в сопоставлении каждому элементу цепи импеданса и дальнейшего подсчёта импеданса цепи.
Метод комплексный амплитуд – прекрасный способ просчитать систему, без всяких дифуров, но у него есть одно ограничение – он способен просчитать только устоявшееся поведение системы.
Что такое устоявшееся поведение?
Например, это может быть постоянный ток, или переменный синусоидальный ток какой-то частоты – да, токи меняются, но они меняются за период, а потом снова возвращаются к тому, что было.
А вот, например, разрядка конденсатора (или катушки) через резистор – процесс диссипативный. Конденсатор или катушка изначально обладали энергий, но резистор всё сожрал, преобразовав в ток, и в итоге ток в цепи исчезнет и никогда уже не будет прежним.

К таким диссипативным процессам метод комплексных амплитуд не применим.

Можно дать и другое понятие , будет ли применим метод комплексных амплитуд к цепи. Этот метод подразумевает наличие частоты колебаний у системы. Если в системе есть колебания (переменный ток, например) – отлично. Если же нет – чао, бамбино-студенто, сорри…

Характеристики линейных цепей

Для начала напомним вид функции Хевисайда, она нам сейчас потребуется:

Функция Хэвисайда:

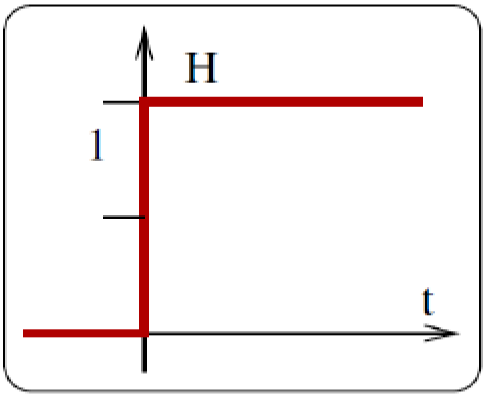


Рис. 1. 9. Функция Хэвисайда.

$$\mathcal{H}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t > 0, \\ 1/2, & \text{если } t = 0, \\ 0, & \text{если } t < 0. \end{cases}$$

На этот раз задача у нас немного другая. Представим себе линейную цепь, где мы взяли её две любые точки, подсоединили к ним контакты, которые мы назвали выход и вход входного напряжения (как вы догадались, мы подсоединили к этим двум клеммам идеальный источник напряжения, ручку которого мы можем вертеть), к двум другим точкам подсоединили два других контакта, которые мы бы назвали выход и вход выходного напряжения (к этим бы клеммам мы подсоединили вольтметр).

а всю оставшуюся цепь запаковали в чёрных ящик.

На Всероссийской Олимпиаде Мелкой, Но Дофига Умной Школоты любимым средством борьбы той самой школоты с чёрным ящиком было «сняли ВАХ», но ВАХ мы бы могли беспрепятственно снять, если бы у нас не было инертных элементов – конденсатора и катушки. И при одном и том же напряжении у нас была бы разная сила тока, в зависимости от того, в какую сторону мы крутим ручку на источнике напряжения – повышаем его или понижаем.

Итак, мы на третьем курсе и должны придумать более чокнутый… то есть продвинутый способ.

Расскажу вам сказку. Сидит второкур Хевисайдов на праке по элмагу:

Момент времени	Напряжение на источнике	Что думает в этот момент Хевисайдов
0 с	0 В	Нельзя делать упражнение, пока препода нет
1 с	0 В	Так, он заходит в аудиторию…
2 с	0 В	Ой-ой-ой!!!
2,9999с	0 В	…
3 с	10 В	ПОЛЕВОЙ!!!

(Полевой Пётр Валерьевич - очень своеобразный преподаватель с кафедры общесоса).

От волнения Хевисайдов резко, за бесконечно малое время, выкручивает ручку источника напряжения на максимум и выбегает в страхе из аудитории. Или сидит три минуты в ступоре. В общем, установку долгое время не трогает.

Если бы в цепи не было неинертных элементов, то после выкручивания ручки показания вольтметров бы вскочили от нуля до какого-то значения и там бы замерли. Но у нас есть инертные элементы, и они своей индуктивностью могут вызвать дальнейшие колебания стрелки.
Возможный вариант развития событий:

Полученный график, очевидно, пропорционален тому напряжению, на которое выкрутил от шока Хевисайдов (выкрутил бы он источник на 20 Вольт, на вольтметре тогда было бы в два раза больше… но для этого в кабинет должно было бы одновременно зайти два Полевых). Если мы поделим график на это напряжение (в этом случае ось ординат станет безразмерной, а численно график будет соответствовать тому, как будто Хевисайдов выкрутил напряжение на 1 В).

ВАЖНЫЙ МОМЕНТ: Полученный после такой нормировки график функции ($h(t_{зап})$, она называется переходной функцией (или характеристикой)) ***будет исключительно функцией установки!!!*** Ну, в самом деле, от Хевисайдова зависело только напряжение, на которое он единомоментно выкрутит ручку источника, но мы как раз на него поделили и зависимость пропала.
Эта функция нам очень понадобится в дальнейшем. Она характеризует цепь, в частности – её задержку. Например, повысив индуктивность катушек, у нас все пики сместятся вправо по времени.

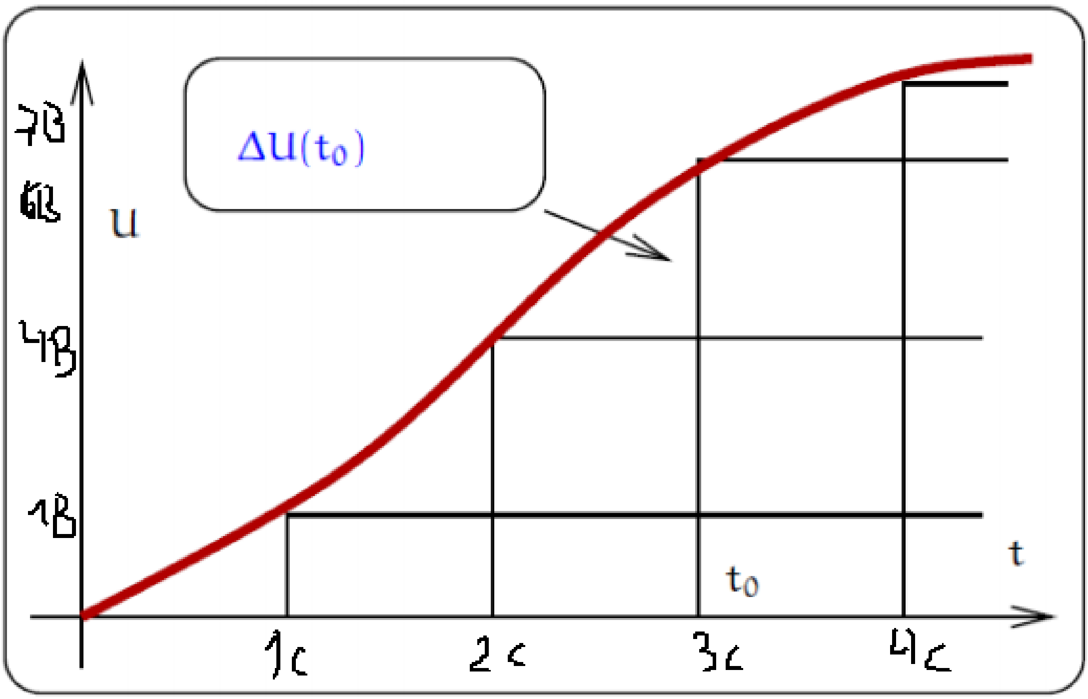
На том же праке сидит второкур Нормальнов, начинает повышать напряжение с нуля, делает он это, хоть и неравномерно, но без скачков:

Момент времени	Напряжение на источнике	Что думает в этот момент Нормальнов
0 с	0 В	Погнали первое упражнение, пока препода нет
1 с	1 В	Так, он заходит в аудиторию…
2 с	4 В	Кто этот дядька? Забыл фамилию
3 с	6 В	Полевой? Да меня после Инночки трудно чем-то увидеть

(Инночка – это Инна Борисовна Иванова/Полякова, очень своеобразный преподаватель с кафедры общесоса).
Задача, которая стоит перед нами: зная зависимость $U_{вх}(t)$ (т.е. поведение Нормальнова относительно вольтметра) и функцию $h(t_{зап})$, которую мы получили у Хевисайдова, можем ли мы предсказать поведение вольтметра у Нормальнова?

Да, можем!!! Именно в этом и весь прикол этой темы!!!

Т.к. система линейная, то представим поведение источника у Нормальнова как суперпозицию множества Хевисайдовых.



В момент времени 1с подбегает Хевисайдов, резко крутит ручку на 1 В и убегает. Через секунду подбегает второй Хевисайдов, крутит ручку на 3 В убегает. И т.д.
Понятно, увеличивая число подбегающих Хевисайдовых и уменьшая шаг, на который они крутят ручку, мы приблизимся к графику Нормальнова.
В показания вольтметра в момент времени t , вклад от Хевисайдова, подбежавшего в момент времени τ, будет h(t- τ) {см. график с установки Хевисайдова} *на сколько повернул ручку этот Хевисайдов в момент времени τ) ($t_{зап}$ будет равно t-τ). А повернул он её, если задуматься, на производную $U_{вх}()$ в момент времени τ.
Не запутайтесь в буквах тэ: t – момент времени, когда мы смотрим на показания вольтметра, τ – момент времени, когда к установке прибежал какой-то Хевисайдов. Итак, резюмируем: вклад Хевисайдова в показания вольтметра в момент времени t, подбежавшего в момент времени τ, составляет h(t- τ) * $dU_{вх}(t)/dt|$в момент времени t=τ.
Интегрируя по всем Хевисайдовым, получаем:

$$U_{вых}(t)=\int_{-\infty}^{t} h(t-\tau)\frac{dU_{вх}}{dt}(\tau)\,d\tau$$

Это и есть разложение по функциям Хевисайда!

У вас возник вопрос – а почему интеграл берётся от –бесконечности? Потому что до Нормальнова на установочке мог работать другой второкур, а у установки оказались очень индуктивные (т.е. инертные)катушки и к моменту, как за остановку сел Нормальнов, теоретически ещё может сказываться её прошлое. …В случае, если установка абсолютно новая (это не случай ФФ, как вы понимаете, тут калифорний на прак никак завести не могут), то интеграл можно заменить на собственный от 0 сек. Но от – бесконечности – более общий случай, учитывающий прошлое установки вплоть от рождения Вселенной 15 млрд лет назад.

Импульсная функция.

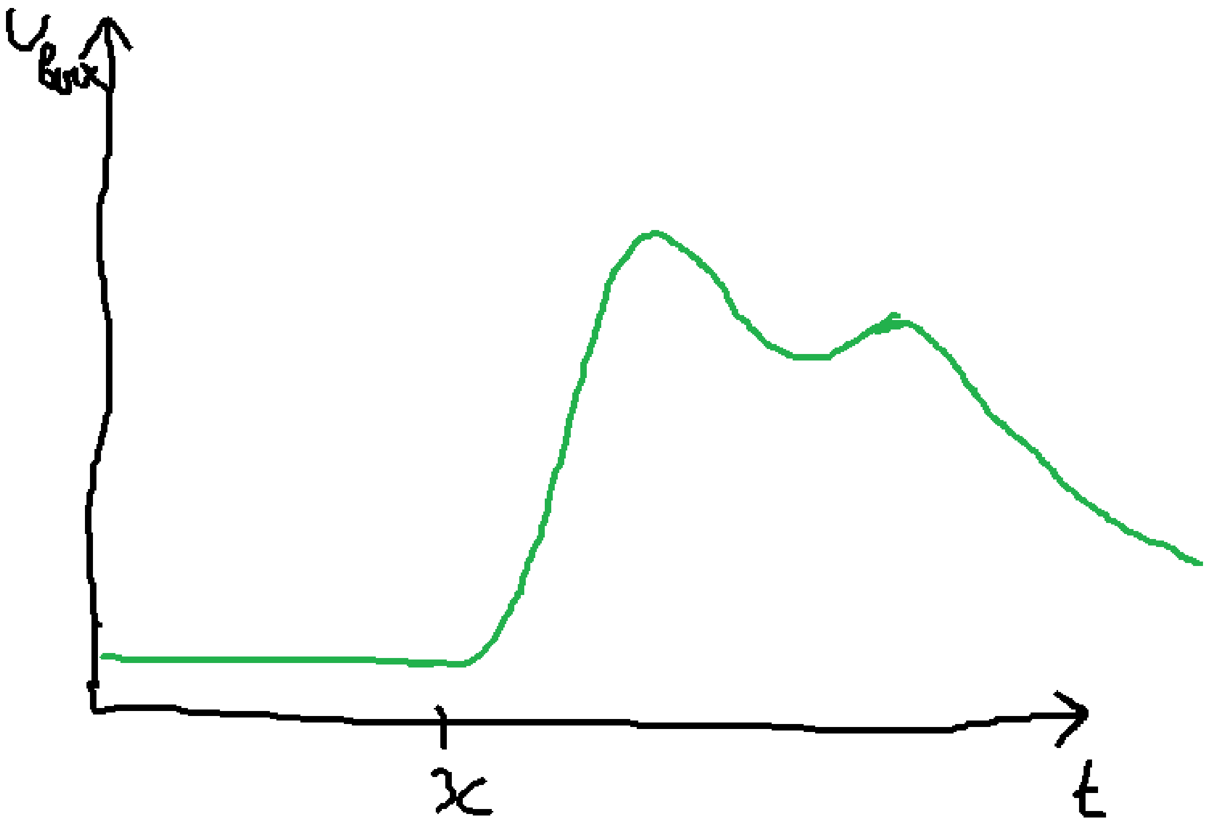
Движение ручки источника напряжения можно представить не только как суперпозицию функций Хевисанда, но и дельта-функций Дирака (или, как я их называю за форму их графика, штырь-функций).

Давайте представим, что события на том праке у второкура Штырёва развивались чуть иначе:

Момент времени	Напряжение на источнике	Что думает в этот момент Штырёв
0 с	0 В	Нельзя делать упражнение, пока препода нет
1 с	0 В	Так, я слышу шаги…
2 с	0 В	Открывается дверь
2,9999с	0 В	…
3 с	1000 В	ПОЛЕВОЙ!!!
3,0001с	0 В	ОН УШЁЛ!!!
4 с	0 В	А вот и Ксюша. Фуф, чилловый прак будет
5 с	0 В	Ксюша зовёт меня на допуск, так что к установке я вернусь нескоро

(Ксюша – Ксения Михайловна Цысарь, очень халявный преп с кафедры общесоса).

Итак, Штырёв дал цепи очень короткий, но огромный по величине импульс. Что дальше? Неужели после 3,0001с все процессы в цепи прекратились? Конечно же, нет, в цепи есть же инертные элементы – катушки да конденсаторы. Кстати, и до 3,0001с вольтметр мог показывать не 0 по причинам, описанным выше – до Штырёва на установочке мог работать другой второкур, а у установки оказались очень индуктивные катушки… Например, график зависимости напряжения на вольтметре у Штырёва от времени может быть таким:



Со стремлением t к бесконечности он может и не стремиться к 0, если в цепи присутствует ЭДС.

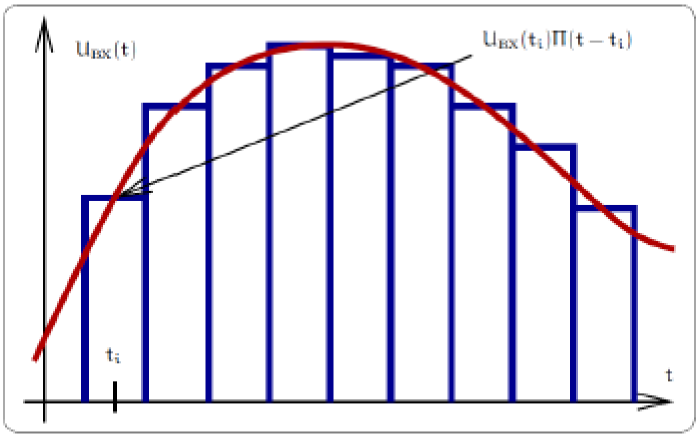
Функцию, которую мы сейчас получили, назовём $g(t_{зап})$. Если h() называлась переходная функция, жешка имеет другое название – импульсная характеристика.

А теперь представим себе на том же праке второкура Нормальнова:

Момент времени	Напряжение на источнике	Что думает в этот момент второкур Нормальнов
0 с	0 В	Погнали первое упражнение, пока препода нет
1 с	100 В	Так, он заходит в аудиторию…
2 с	257 В	Кто этот дядька? Забыл фамилию
3 с	341 В	Полевой? Да меня после Инночки трудно чем-то удивить
4 с	497 В	Ксюша? Тоже норм
5 с	633 В	Я одного Чёрного Ловеласа из Смешариков боюсь…

А можем ли мы, зная $g(t_{зап})$ от Штырёва, получить то, что будет у Нормальнова? Как и в случае с Хевисайдовым, да!

Для этого нам нужно разложить функцию $U_{вх}()$ по дельта-функциям.



Далее вместо одного Нормальнова на установке будет работать множество Штырёвых: один подбегает, стоит на установке бесконечно малое время, передавая эстафету следующему Штырёву, который сделает то же самое. Мы, зная, как реагирует система на простую функцию (дельта-функцию), пытаемся разложить сложную функцию Нормальнова на простые функции и представить показания вольтметра как суперпозицию!

Каждый Штырёв, в отличие от Хевисайдова, будет выкручивать ручку не на производную $U_{вх}()$, а на само значение $U_{вх}()$ в данный момент времени τ. Поэтому в итоге мы получим

$$U_{вых}(t) = \int_{-\infty}^{t} g(t-\tau)\, U_{вх}(\tau)\, d\tau$$

Связь переходной и импульсной характеристики

Чтобы её получить, давайте вспомним, что g(t) – это график показаний вольтметра у Хевисайдова, а h(t) – у Штырёва (с точностью до размерностей, но на размерности мы сейчас забьём).

Давайте вместо Хевисайдова на его установке будет работать бесконечного много Штырёв, которые будут по очереди ненадолго включать источник. Выписываем хорошо знакомый нам интеграл:

$$U_{вых}(t) = \int_{-\infty}^{t} U(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$$

$$\|$$

$$h(t)$$

U константа и выносится из-под знака интеграла, т.к. это константа ввиду специфики работы Хевисайдова в виде его ступор.
Забив на неё (мы же обещали забить на размерность), получаем

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)\, d\tau$$

И после дифференцирования конечную связь:

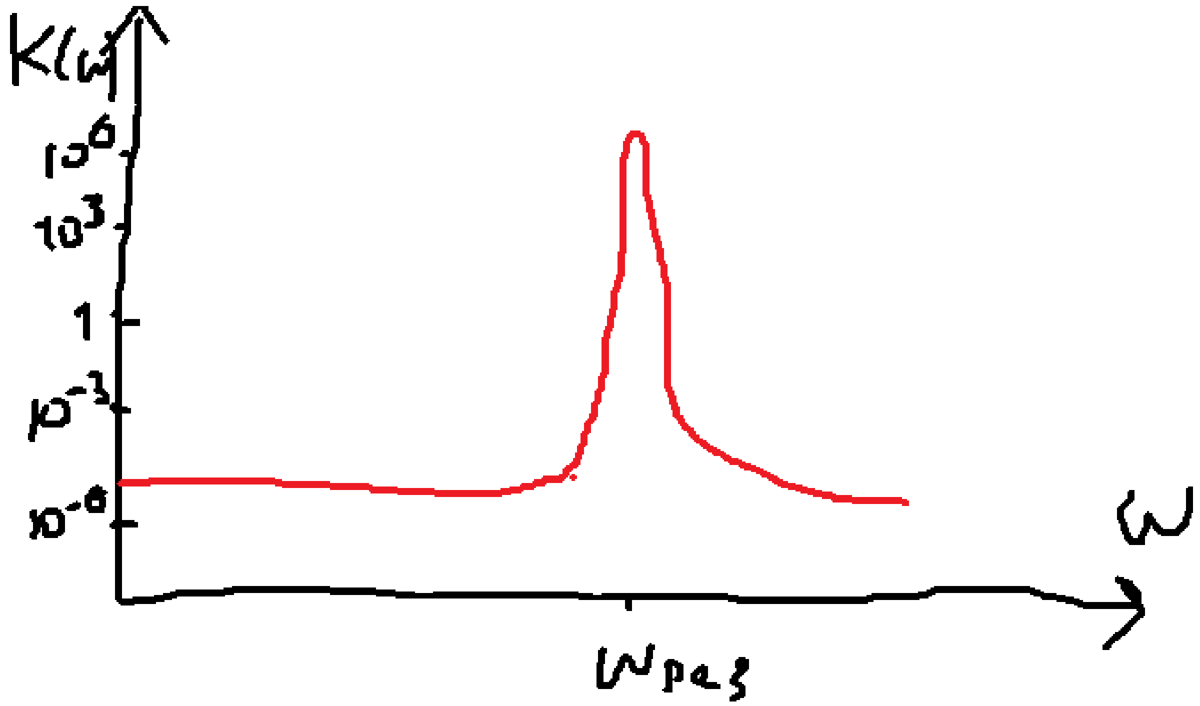
$$g(\tau) = \frac{dh(\tau)}{d\tau}.$$

Комплексный коэффициент передачи

Когда мы говорили про g() и h(), было достаточно сложно, но у нас нигде не было частоты и страшной фразы «разложим по частотам».
Наравне с переходной и импульсной характеристикой цепи существует ещё одна – K(ω), комплексный коэффициент передачи. И по аргументу вы уже видите, в чём проблема – ща тут будет Фурье.
Итак, у нас есть $U_{вх}(t)$ и у $U_{вых}(t)$. Два графика, две функции.
Мы оба раскладываем в интеграл Фурье и получаем частотную плотность $u_{вх}(\omega)$ и у $u_{вых}(\omega)$ (чтобы не путать со старыми функциями, будем их обозначать маленькой буквой u). Эти частотные плотности – комплексные!
И теперь мы уже можем ввести

$$\tilde{K}(\omega) = \frac{\tilde{U}_{вых}(\omega)}{\tilde{U}_{вх}(\omega)}$$

Чтобы подчеркнуть, что величины – комплексные, я поставил знак волны.
В чём физический смысл коэффициента передачи? Он означает, какие частоты цепь усиливает, какие поглощает.
Представьте себя крутящего ручку радиоприёмника. На радиоприёмник поступает какой-то сигнал – куча сообщений ото всюду по всем частотам. Но благодаря явлению резонанса нужная вам частота многократно усиливается, а остальные – поглощаются.
График коэффициента передачи для радиоприёмника:



*Связь K(*ω) с переходной и импульсной характеристикой.
K(ω) тоже является характеристикой цепи, так что неудивительно, что такая связь есть. Неохота заострять внимание на доказательстве, там требуется работа с Фурье, чего вы наверняка не любите, так что просто приведу формулы:

$$K(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\omega t}\, dt,$$

$$
\begin{aligned}
g(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega)\, e^{i\omega t}\, \frac{d\omega}{2\pi}, \\
h(t) &= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(\omega)}{i\omega + \epsilon}\, e^{i\omega t}\, \frac{d\omega}{2\pi},
\end{aligned}
$$

Т.е. зная из K, g, h всего одну функцию (любую), мы можем восстановить оставшиеся две.